

統計的探究プロセスと数学の学びとの 往来に関する研究

— 生徒の批判的思考に着目して —

A Study of the Traffic between the Statistical Inquiry Process and Learning Mathematics:

Focusing on Students' Critical Thinking

新 井 仁

ARAI Hitoshi

要 約

日本では、統計的な内容の学習は数学の1つの領域として位置付けられているが、数学とのつながりが希薄になりがちであり、場合によっては数学科とは独立した学習内容とされる懸念もある。しかし、データの活用を前提とした統計的な内容の学習には、数学の内容と関わる部分が多く含まれている。そのため、リアルデータを用いた統計的探究プロセスによる問題解決学習を数学科の中で行うことは、数学の他の内容項目と関連し、数学の学習を豊かにすることが期待できるものと考えられる。

筆者は、この統計的探究プロセスと数学の学びとの往来に批判的思考が関与すると考え、Wild-Pfannkuch (1999) の論旨を参考にして批判的思考を捉える枠組みを構築した(新井, 2021)。そこで本研究では、学習者の統計的探究プロセスと数学の学びとの往来について検証することにより、統計的な内容の学習を数学科に位置付けることの意義を明らかにし、その価値について指摘した。

キーワード 統計的探究プロセス 批判的思考 数学の学びとの往来 概念学習型

1. 研究の目的と方法

1.1 研究の目的

本研究の目的は、2変数間の関数関係を捉える活動を含む統計的探究において、生徒にとっての新たな数学や高度な数学を学ぶ機会を得る際の批判的思考の関与を明らかにすることである。

1.2 研究の方法

中学校で実際に行われた数学の授業を取り上げ、学びにおける生徒の思考を筆者が作成した模式図と枠組みによって整理し、統計的探究プロセスと数学の学びとの往来について

分析する。

なお、本稿で分析の対象とした授業は2019年に実施されたものである。この授業について、生徒の批判的思考に着目した分析はこれまでに行ってない。

2. 問題場面と概要

2.1 問題場面

授業学級の生徒が通う長野市立川中島中学校（以後、「中学校」と表記）は、北陸新幹線の長野駅～上田駅の線路沿いに位置する（図1）。



図1 長野駅・中学校・上田駅の位置関係

この線路上において、上下線のそれぞれの新幹線がすれ違うタイミングで学校から写真撮影を行い、学校紹介に使いたい。そこで、授業中に検証できる可能性を考慮し、午前11時～12時の間で上りと下りの新幹線がすれ違う時刻と場所を、データに基づいて特定することを試みた。

2.2 教材の概要

2.2.1 時刻表による予測

11時～12時の間では、あさま614（上り）とあさま607（下り）が長野駅～上田駅の間ですれ違う。表1は、授業実施当時のこれらの時刻表である。

表 1 時刻表

あさま614 (上り)		あさま607 (下り)	
駅	時刻	駅	時刻
長野駅	11:26	上田駅	11:21
上田駅	11:37	長野駅	11:33

また、長野駅から中学校までの距離を含め、要所までの距離は表 2 の通りである。表中の「小学校」とは、川中島小学校のことである（以下同様）。

表 2 長野駅からの距離 (km)

長野駅	0.00	小学校	5.40
歩道橋	0.28	中学校	6.20
県庁通り	0.67	今井駅	7.00
裾花川	0.94	千曲川	11.30
犀川	3.90	上田駅	33.00

表 1 に基づき、11時 x 分における長野駅から新幹線までの距離を y km とし、新幹線が一定速度で移動すると仮定すると、両者の走行の様子を表すグラフは図 2 のような 2 直線になり、これはダイアグラムの一部だと捉えることができる。なお、長野駅～上田駅の距離は 33km で、本稿では走行した「道のり」を「距離」と表すこととする。

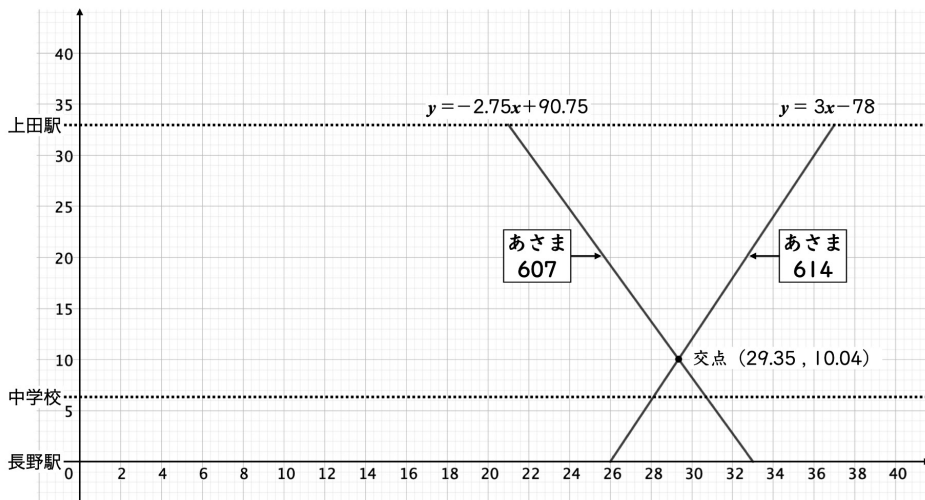


図 2 新幹線の走行の様子

2 直線のそれぞれの式は、次のようになる。

- ・ あさま614：2点 (26, 0)、(37, 33) を通る直線 $\rightarrow y = 3x - 78$ ($26 \leq x \leq 37$)
- ・ あさま607：2点 (21, 33)、(33, 0) を通る直線 $\rightarrow y = -2.75x + 90.75$ ($21 \leq x \leq 33$)

2 直線の交点の座標は、およそ (29, 10) となり、「11:29に長野駅から10kmの辺りですれ違う」と予測される。これが正しいとすると、中学校は長野駅から6.2kmの位置にあ

るため、すれ違いの様子を学校から撮影することはできない。しかし、実際には中学校から見える位置ですれ違う。予測値とのずれは4 km程度で単純な誤差とは考えにくく、なぜ予測が大きくずれたのかという疑問が生じる。

2.2.2 収集したデータに基づく予測

新幹線は一定速度で走行せず、出発から加速し、到着に向けて減速する。また、長野駅～上田駅の距離は、新幹線の駅としては短く、一定速度だと考えることに無理がある。一方、ダイヤグラムは様々な駅における状況を把握することに適しているが、単線であれば途中のすれ違いの位置に関する正確性はあまり必要ない。このようなことから、長野駅～上田駅間のすれ違いの時刻と位置を予測する際に直線のグラフで考えることは不適切だと考えられる。そこで、新幹線の走行について捉えるため、幾つかの地点を通過する時刻のデータを収集した(表3)。

表3 各地点の通過時刻

あさま614			あさま607		
地点	11時 x 分	y km	地点	11時 x 分	y km
長野駅	26.0	0.00	…		
連絡橋	26.6	0.28	中学校		6.20
県庁通り	26.9	0.67	小学校		5.40
裾花川	27.1	0.94	犀川	29.3	3.90
安茂里駅	28.0	2.70	安茂里駅	29.7	2.70
犀川	28.4	3.90	裾花川	30.7	0.94
小学校		5.40	県庁通り	30.9	0.67
中学校		6.20	連絡橋	31.3	0.28
…			長野駅	32.0	0.00

図3は、あさま614のデータを座標平面上に表したものである。点の並びから、徐々に加速しているものと捉え、曲線で表すこと(一定の割合で加速しているとすれば放物線)の方が妥当だと考えられる。

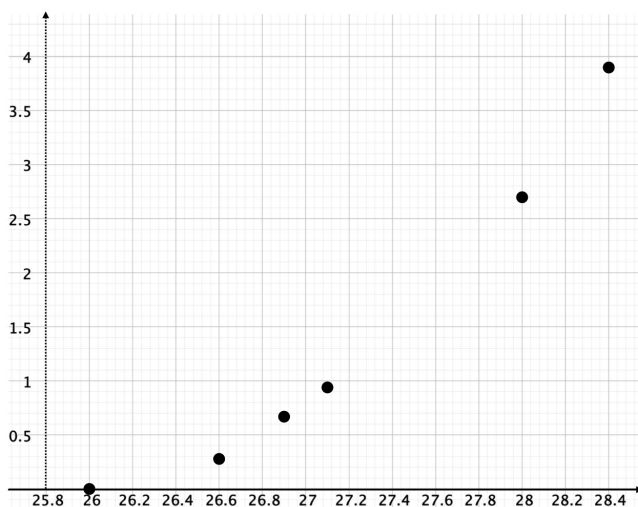


図3 あさま614

また、収集したデータは長野駅～中学校間の複数の地点であり、中学校は長野駅～上田駅間の中間地点より10kmほど長野駅寄りであるため、あさま614は加速区間、あさま607は減速区間だと考えてよさそうである。これらを根拠として、両者を放物線で回帰すると、図4のようなになる。

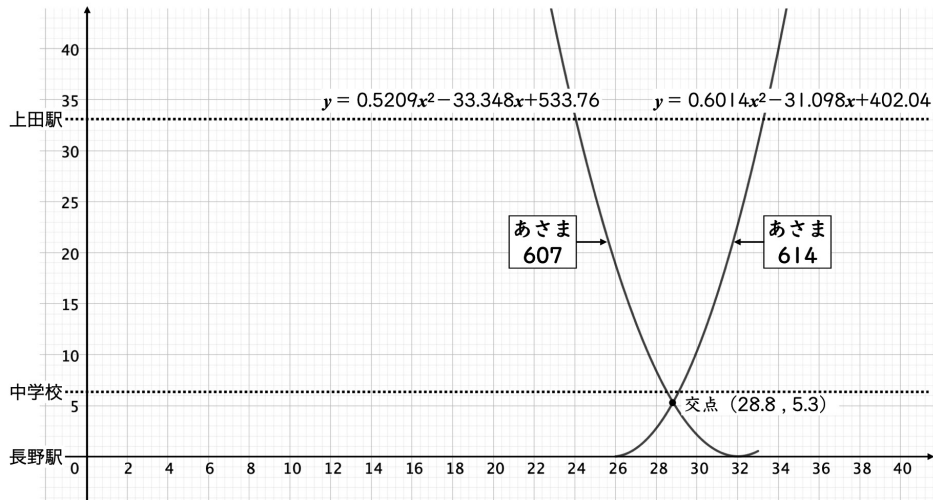


図4 放物線による回帰グラフ

それぞれの回帰グラフの算出等は、ICTを用いて行った。グラフの交点の座標はおおよそ(29, 5.3)となり、「11:29に長野駅から5.3kmの辺りですれ違う」と予測され、中学校からその様子を撮影することが可能である。

2.2.3 授業での扱い

第1時に2.2.1の内容を扱って疑問点を明らかにし、第2時に2.2.2の内容を扱う。

3. 授業の実際と考察

3.1 授業設定

- ・期 日：2019年9月6日・9日（2回）
- ・授業学級：長野市立川中島中学校3年5組
- ・授 業 者：飯島政昭

3.2 第1時（9月6日）の様子

教師は、問題場面として「午前11時～12時の間で上りと下りの新幹線がすれ違う時刻と場所を、データに基づいて特定する」ことを示し、表1を提示した。（T：教師）

N01	速さがわからないと調べられない。
T01	速さは何と何がわかると調べられますか？
N02	あー、距離だ。距離がわからないといけない。[中略] 長野（駅）・上田（駅）間の距離と、(両駅からの)川中（川中島中）の距離。

T02 (表2提示) 長野駅からの距離の一覧表です。これでどうやって調べるの？

K01 グラフにする。

T03 x 軸と y 軸は何にする？

K02 x が時間、 y は長野駅からの距離。

その後生徒は、新幹線が一定の速さで走行すると仮定し、11:29に長野駅から10kmの地点ですれ違おうと予測した。この地点だと中学校から見ることにはできない。しかし、実際には見ることができる。教師はこの事実を紹介し、次のように問いかけた。

T04 なぜ予測がはずれたのでしょうか。(第1時終了)

N生は、新幹線の速さがわかれば予測できると考え、時刻表(表1)に加え、長野駅～上田駅の距離が必要だと述べた(N02)。これは、新幹線が一定速度で走行すると仮定しているためだと考えられる。この仮定に基づいて予測結果は得られたが、教師が実際の様子を示したことで予測結果が実態に合っていないことを確認し、教師はT04のように問い、生徒は新たな問題意識をもった。

図5はA生の記述(A01とする)、図6はW生の記述(W01とする)である。いずれも一定の速度だと仮定して求めた予測結果が実際と合っていないことを認知し、新幹線が一定速度で走行するものとしていたことの信憑性を問い直している。

仮定
 ・距離は時間の一次関数と仮定した。
 ・直線と仮定。 ・速さが一定と仮定。

結論 撮景と仮定。(11時29分)
 →今井駅と牛曲川の間にすれ違おうから。

長野駅から10kmくらいに牛曲川のちかくとすれ違おう。

・川中と川下の間にすれ違おう。
 ・はずれ。

・速さが一定と仮定したが、実際は速さが一定ではなかったから。
 ・本来はら初速はおそい。

図5 A生の記述(A01)

仮定
 距離は時間の一次関数とみなした直線とみなす

結論 11:29分ぐらい
 川中からすれ違いを撮影することはできない
 長野駅から10kmぐらい 千曲川のおあたりですれ違うけど、千曲川は川中
 から見えないから

川中と川小の間ですれ違う ハズレ

一定の速さではないものを一定とみなして
 しまったため、実際と違う結果になってしまった

図6 W生の記述 (W01)

3.3 第2時 (9月9日)の様子

教師は、第1時の結果を踏まえ、より正確に予測するためにどうすればよいかと問いかけた。

- D01 もっと情報があれば、精密なグラフがつかれると思う。
- T05 どんな情報かをMさんが書いています。
- M01 (第1時における自分の予測結果を見直し) もう2、3カ所ぐらいの新幹線が通った時刻と長野駅からの距離がわかれば、速さがわかるので、もう少し正確になると思う。
- T06 時刻と長野駅からの距離のデータがもっとあれば、正確なグラフがかけるのではないかという提案ですね。そこで、今日はこの2台の新幹線(あさま614とあさま607)のすれ違いを、より正確に予測したいと思います。先程、時刻と長野駅からの距離のデータがたくさんあればよいという提案がありました、そのデータを取ってあります。

教師が実際に新幹線に乗り、窓枠に時計を置いてビデオ撮影した動画を見せることにより、表3のデータを確認し、提示した。

- T07 このデータをどうしますか？
- 生徒 (時間と距離の) グラフにする。
- T08 Aさんは、曲線、折れ線、どちらがよいと思いますか？
- A02 曲線です。折れ線だとスピードが上がったり下がったりするから。
- T09 Hさんは？
- H01 折れ線だと点を通るたびに速さが変わる。曲線だと徐々に速さが変わっていく。曲線の方がいい。

T10 点 (のところ) を通るたびに速さが変わっていくのはおかしいという訳だね。
Yさんは?
Y01 曲線なら、なめらかにスピードが速くなる。折れ線だと急に速さが速くなる。
普通の新幹線はだんだん速くなっていくから曲線。

生徒は表3のデータを使い、理科で学習した加速度の内容を想起し、グラフの形状は放物線とすることが妥当だと考え、「11：29頃、長野駅から5.3kmの地点ですれ違い、中学校から見る事ができる」と改めて予測した。グラフは頂点が原点にない放物線だが、グラフをかいたり、その式を求めたり、さらに交点の座標を確認したりすることは、ICTを用いることで可能にした。

D生は、第1時で得た予測結果が不正確であったことの原因を情報の少なさだったと解釈し、目的である正確な予測結果を得るためには、より多くの情報が必要だと述べている(D01)。M生は、他者も自分自身も第1時で新幹線が一定速度で走行していると仮定した発想が理にかなっていないと解釈し、正確な予測結果を得るためには複数地点の通過時刻と長野駅からの距離のデータが必要だと述べている(M01)。

表3のデータを得て座標平面上にプロットした後、グラフをどのようにすればよいか検討した。H生は最初折れ線で結んだが、この場合、点で表された位置を通過する度に速度が急激に変わることになり、これは生活経験に基づく既知の事実と一致しないため、曲線のグラフ(放物線)が妥当だと自らの考えを修正している(H01)。点の配列の様子から何となく曲線にするのではなく、根拠を明確にしてグラフの形状を判断したものと考えられる。

実際には11：29に中学校と小学校の間ですれ違い、中学校から見る事ができるため、かなり正確な予測結果だったといえる。しかし、この位置は予測地点と400～500mずれている。4km程度ずれていた第1時の予測結果よりかなり正確だが、生徒は気になり、次のような意見が出された。

I01 長野駅から犀川までのデータしかない。データが少ない。
N03 この先のデータがないと…。(あさま614の場合) このままだと、ただ単に加速しているけれど、一番速いところまでいったら一定(速度)になって、上田駅に着くときには減速していくから、グラフの傾きとかが変わっていくから…。
T11 長野駅から犀川までのデータしかないけれど、この先はどうなるかわからない。最後は減速している。このグラフは途中で変わるということですか？(後略)
C01 スピードが出るまでは、こうやって(曲線で)上がって行って、最高速度になったら直線のように一定になって、だんだん(上田)駅に近付けば…
T12 (Cさんが)言っていること、わかる？
生徒 わかる。
T13 途中で(速さが)一定になる、直線ということ、最後は減速するということですね。それでは時間になってしまいました。礼の後、感想を書いてください。
(第2時終了)

中学校は、犀川と上田駅間に位置する。そのため、上りと下り両者の新幹線の運行に関するデータは、中学校より長野駅方面の地点に限られている。これが正確な予測ができない原因だと考えたI生は、表3のデータでは目的を果たすには不十分だと指摘している(I01)。この発話に刺激されたN生は、他者の発想に基づいて表3のデータを使って作成した放物線のグラフ(図4)について、到着駅近付で減速するという既知の事実を想起してグラフの信憑性を問い直し、不適切であることを指摘している(N03)。第1時のN生の考えから大きく変容している様子が窺える。

図7は、W生の記述である(W02とする)。新たな仮定による予測結果を得て、その妥当性を認めたが、D01に刺激され、グラフの概形をイメージしながら、犀川から上田駅までのデータがあれば一層正確な予測が可能だろうと、新たな問題を捉えている。

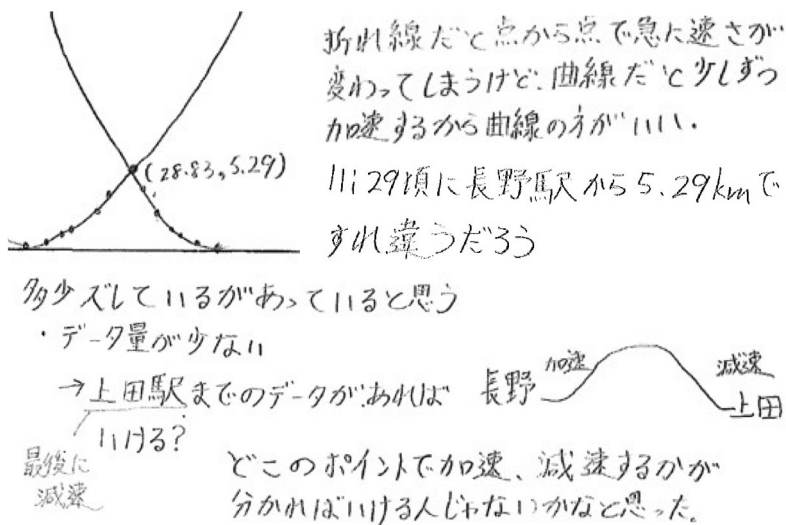


図7 W生の記述 (W02)

3.4 生徒の批判的思考

生徒の思考の様相や、これを誘発する刺激は、次のように捉えられる。

- T04: 生徒の批判的思考を誘発する刺激。 刺激
- A01・W01: 「予測結果=所々で得た結果」に対し、「新幹線が一定速度で走行=先入観や思い込みになっていないか」を基準に尋問。 E5
- D01: 「予測結果=所々で得た結果」に対し、「正確な予測=目的は何か」を基準に尋問。 E4 / M01の考えを誘発する刺激。 刺激
- M01: 「他者の発想・判断/自分自身の発想・判断」に対し、「理にかなっているか」を基準に尋問、複数データの必要性を指摘。 C2 D2
- H01: 「自分自身の発想・判断」に対し、「既知の事実と一致しているか」を基準に尋問。 D3
- I01: 「実際にすれ違う地点=外部から得た見解」及び「表3=外部から得たデータ」

に対し、「目的は何か」を基準に尋問。 B 4 A 4

N03：「他者の発想・判断」に対し、「既知の事実と一致しているか／正しいか」を基準に尋問。 C 3 C 1

3.5 考察

本授業では、現実事象に基づきながら放物線のグラフを導き出したり、その交点の意味を考えたりするなど、生徒にとって高度な数学を学ぶ機会を得た。これは、数学の世界に移行して考え、改めて文脈に戻る学びとなっており、この背景に批判的思考が関与したものと考えられる。

生徒の思考の様相を枠組みに整理すると、表 4 のようになる。

表 4 批判的思考を捉える枠組み

	A 外部から 得たデータ	B 外部から 得た見解	C 他者の 発想・判断	D 自分自身の 発想・判断	E 所々で 得た結果
1 正しいか			N03*		
2 理にかなっているか			M01*	M01*	
3 既知の事実と 一致しているか			N03*	H01*	
4 目的は何か	I 01	I 01			D01
5 先入観や思い込み になっていないか					A01 W01
6 感情的に になっていないか					
批判的思考を誘発する刺激	T04・D01				

※ … 数学の学習への移行に直接関与したと考えられる批判的思考

※の思考は、T04、D01の刺激を受け、「全ての点を生かすグラフを決定する学習 (M01)」「グラフの意味を読み取る学習 (H01)」「多様なグラフについて知る学習 (N03)」といった文脈から離れた数学の学びへの移行を可能にしており、図 8 の模式図で表すことができる。

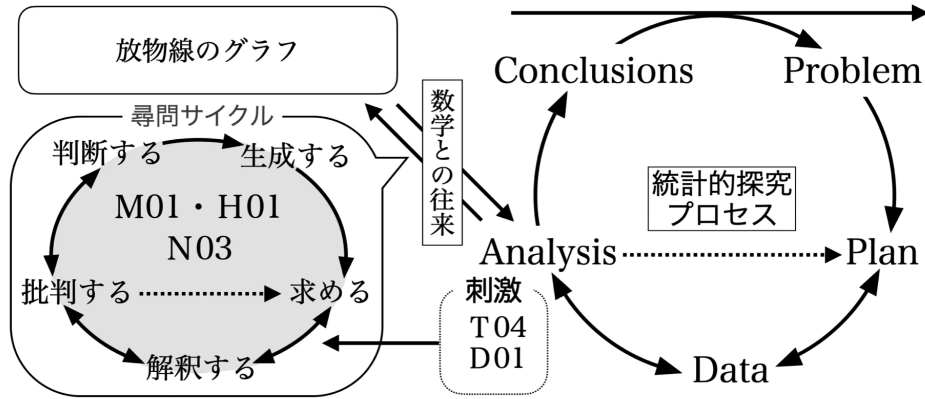


図8 思考の模式図

なお、本授業は中学校3学年で行ったため、一次関数や連立方程式については学習済みだが、第1時の冒頭部分は「座標平面上の2点を通るグラフの式の求め方を学ぶ機会」や「2直線の交点の座標を求める機会」に移行する可能性がある。また、W生の変容(W01→W02)は、さらなる数学の学びに発展する可能性があるものと考えられる。

4. まとめと今後の課題

4.1 まとめ

本授業は、関数領域の単元導入時に行った。基礎的な知識や技能を学び、これを使って問題解決を行う「活用法」ではなく、問題解決を行いながら概念を学ぶ「概念学習型」を意図した扱いである。

2変数間の関数関係を捉える活動を含む統計的探究において、現実事象から得たデータを使い、グラフ化したことに基づいて結論を得て終わるのではなく、新たなデータの必要性を認識したり、妥当なグラフについて検討したりしながら、生徒にとっての新たな数学や高度な数学を学んだ。その際、生活経験を無視した先入観や思い込みになっていることに気づいたり、結果と現実事象を比較して両者の齟齬について深く考えたりする様子が見られ、批判的思考が関与していることが明らかとなった。統計的な内容の学習は、文脈領域と数学領域の往来の機会を豊かにし、概念学習型の授業づくりにおいて有益であるため、数学科の中で統計的な内容を扱うことは重要な意味をもつことを指摘する。

なお、概念学習型とは、身につけている数学を使って、新たな「道具」を作って解決する学習であり、西村(2012)の定義による。

4.2 今後の課題

- ・記述統計だけを用いる統計的探究による概念学習型の授業づくりにおける批判的思考の関与を明らかにすること。
- ・批判的思考が文脈に依存しない数学の学びに及ぼす影響を明らかにすること。
- ・批判的思考の数学科カリキュラムにおける位置付けを明確化すること。
- ・批判的思考の質的な高まりの様相を明らかにすること。

<付記>

本研究は、長野市立川中島中学校 (当時) 飯島政昭教諭の協力を得てまとめたものである。ここに改めて御礼申し上げます。

引用・参考文献

- 新井仁「統計的探究プロセスにおける批判的思考に関する研究」(専門学術論文), 2021, 96-100.
- 新井仁「問題解決学習における数学の学びに関する一考察—統計的探究プロセスと批判的思考に着目して—」『日本数学教育学会第54回秋期研究大会発表収録』, 2021年10月30日, 97-100.
- C. J. Wild and M. Pfannkuch. Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review* (1999), 67, 3, 223-265.
- 飯島政昭「生徒が「ある関数とみなす」ことを自覚する授業のあり方」(長野県算数数学教育研究会冬の研修会資料), 2020.
- 西村圭一「数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究」, 東洋館出版社, 2012年2月14日, 186.

Received : April, 23, 2022

Accepted : June, 8, 2022