都留文科大学研究紀要　第81集（2015年３月）
The Tsuru University Review, No.81（March, 2015）

古代の問題を題材とした算数・数学授業研究

Teaching School Mathematics from the Point of View of Classical Problems

岡野　恵司　寺川　宏之
OKANO Keiji, TERAKAWA Hiroyuki

要旨

整数，分数，無理数など，子どもの頃に学んだ算数は人類にとって受け入れることが容易というわけでは決してなかった．

この論文では，今となっては身近なものになっている対象について，各時代の人々が苦心するさまや彼らの工夫を紹介・体験することで，数学の進歩や楽しさを感じることができること，またそれら自身，算数・数学教育の題材や研究対象となることを述べる．具体的には古代ギリシア，古代エジプトの問題から，単位分数展開，正五角形の作図問題，ユークリッドの互除法をとりあげる．

1　導入

数学とは理論的に構成された学問であり，正しいことの積み重ねであるにもかかわらず，受け入れることや理解することは相当の苦労がいる．一方，分かった後でそのことを振り返ってみると，なぜあんなに悩んだのかと感じるほど簡単に思えることもある．例えば分数$-5/7$という数を，初めて見た小学生に理解してもらうのは難しい．また，$\sqrt{5}$という数を想像することは，数を数えはじめた子どもには理解できない．このような現象は個人に限らない．人類の歴史においても，四大文明として栄えていた頃のエジプト人には分数の概念はなく，また負の数が広く一般の人々に認められるのは18世紀まで待たねばならなかった．他にも，無理数，アラビア数字，方程式など我々が子どものころに学んだことは，人類にとって受け入れることが容易というわけでは決してなかった．だから生徒が算数・数学を理解することが大変なことも，無理もないともいえる．

そこで今となっては身近のものになっている対象について，各時代の人々が苦心するさまや彼らの工夫を紹介する．これらを体験することで，数学の進歩や楽しさを感じることができること，またそれ自身，算数・数学教育の題材や研究対象となることを述べてみたい．

以下は読み進めることで数学の楽しさが味わえる内容になっており，教材として用いることもできる．

2　計算を楽しむ─古代エジプトの問題から─（対象学年：小学中学年）

古代エジプトでは，定期的なナイル川の氾濫のため測量や天文学が発達し，また課税や富の分配のため実用的な計算が発達した．このような実用のための数学は，幾何学的論証の形をとった古代ギリシアとは対称的といえる．この節では古代エジプトの文献から，彼らが分数を理解するのに単位分数の和を用いていたことを紹介し，単位分数展開について述べる．教育的側面についていえば，単位分数の和への展開は，分数計算の練習や分数の大小の熟知に役立つであろう．どんな分数も異なる単位分数の和に実際に書き表わせることや，その方法で求めた値が確かにもとの数と一致することを確認すると，生徒はとても驚く．

2.1　古代エジプトの分数

3500年以上前の古代エジプトでは分数の概念はなかったが，今でいうところの**単位分数**，すなわち分子が１の $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{7}$ のような分数にあたる概念はあった．これは食糧の配分，土地や遺産の分割，製造のための配合などを計算するために必要だったと考えられている．

紀元前1650年頃にアーメスによって筆写された数学問題集『リンド・パピルス』には，当時の様々な問題が集められている．たとえば問題３には次のような内容の問題が記されている（[3]，[4] 参照．ここでは適当に数値を変えている）：

『パン５個を７人で分けるにはどうしたらよいか．

　解：５の中には７は無いので５個をそれぞれ半分にして10にし，それらを７人に分ける．すると一人にとりあえず $\frac{1}{2}$ 個が行き渡る．まだ１個半（$=\frac{3}{2}$）残っているので，これを７人に行き渡るよう１個を６等分して，一人が $\frac{1}{6}$ ずつ取る．残りは１個の $\frac{1}{3}$（単位分数）であり，これを７人で分けるので一人の分け前は $\frac{1}{21}$ である．したがって一人あたり合計として $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{6}$ と $\frac{1}{21}$ が分け前となる（図１）．』

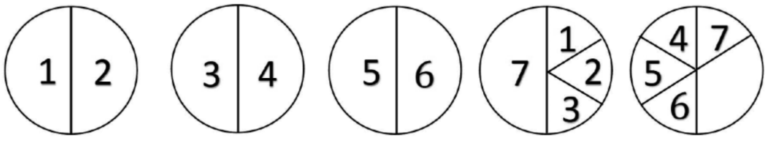

図１：パン５個を７人で分ける

これは $\frac{5}{7}$ を

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}$$

と互いに異なる単位分数の和に表示していることに他ならない．この単位分数による方法は，実に2000年以上にわたって東地中海沿岸で使われていたようである．

2.2　互いに異なる単位分数の和に表示する方法

我々は古代エジプト人になったつもりで，1より小さい分数を，互いに異なる単位分数の和に表してみよう．ここでは前節と少し違う**欲張り展開法**とよばれる方法を述べる．1より小さいどのような分数も，次の方法によって互いに異なる単位分数の和に表示することができる（証明および一般の正の分数については§2.3参照）．考え方は上と似ていて，分子の個数のパンを分母の人数に配ることをイメージし，分配できる分を切り崩していく方法である．

欲張り展開法

1より小さいどのような正の分数も，

その数を超えない単位分数のうち，最大のもので引く

という操作を繰り返すことにより，互いに異なる単位分数の和で表示できる．

「その数を超えない単位分数のうち，最大のもの」の見つけ方は，分子の数のパンを分母の数の人に配るときを考えれば見つけられる．

例 2.1. $\frac{3}{7}$ について行う．まず分子の3の中には分母の7は無く，3を半分にして6にしてもまだ7はない．3を3等分して9にすることで初めて7を超える事を考えると，不等式

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$$

が得られる．$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$ を計算して，$\frac{2}{21}$ に同様の操作を行う．（今度は2個のパンを21人に配ることをイメージし,）2を11等分して22にすると初めて21を超えることより，

$$\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{10}$$

が得られる．$\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231}$ を計算して，単位分数 $\frac{1}{231}$ が残る．以上より

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

となる．生徒には実際に右辺が左辺と一致することを確認させてみるとよい．

例 2.2. 最初に挙げた $\frac{5}{7}$ の場合について，欲張り展開法で互いに異なる単位分数の和に展開してみる．まず5の中には7は無く，5を半分にして10にすることで初めて7を超える事を考えると，不等式

$$\frac{1}{2} < \frac{5}{7} < \frac{1}{1}$$

が得られる．$\frac{5}{7} - \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$ を計算して，$\frac{3}{14}$ に同様の操作を行う．3個のパンを14人に配ることをイメージして（ここがリンドパピルスの例として述べたときと違う），3を5等分して15にすると初めて14を超えることより

$$\frac{1}{5} < \frac{3}{14} < \frac{1}{4}$$

が得られる．$\frac{3}{14} - \frac{1}{5} = \frac{1}{70}$ を計算して，単位分数 $\frac{1}{70}$ が残る．以上より

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$$

となる．このように，和の表示は一通りではない（後述のように無数にある）．

例 2.3. $\frac{12}{13}$について行う．$\frac{1}{2}<\frac{12}{13}<1=\frac{1}{1}$より

$$\frac{12}{13}-\frac{1}{2}=\frac{11}{26}$$

が得られる．$\frac{11}{26}$も同様にして$\frac{1}{3}<\frac{11}{26}<\frac{1}{2}$がわかるので

$$\frac{11}{26}-\frac{1}{3}=\frac{7}{78}$$

が得られる．$\frac{7}{78}$も同様にして$\frac{1}{12}<\frac{7}{78}<\frac{1}{11}$がわかるので

$$\frac{7}{78}-\frac{1}{12}=\frac{1}{156}$$

が得られる．これらより求める互いに異なる単位分数への展開は

$$\frac{12}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{156}$$

となる．このように，欲張り展開法は分母が大きくなる傾向にあるので，授業で扱う際にはレベルに合わせた例を作る必要がある．

単位分数の和に展開する表し方は一通りではない．実際部分分数展開 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ を用いると，任意の単位分数 $\frac{1}{n}$ に対し，

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

が成り立つからである．特に，この方法で一つの分数に対し無数に展開表示を作ることができることがわかる．

例 2.4. 上の例として１を２通りの互いに異なる単位分数の和に展開しよう．$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$であり，片方の$\frac{1}{2}$に対して上記の式を適用すると$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$が得られる．故にまず１通り目の展開

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

が得られる．次にこの$\frac{1}{3}$に対して上記の式を適用すると$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$が得られる．故に２通り目の展開

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

が得られる．

用いることができる単位分数に，例えば「分母は奇数のみ」，「項の数は５項以下である１の単位分数展開」などの制限を加えると，問題は深みを増す．単位分数への展開は，現在の数論の研究対象でもあり，未解決問題も存在する（[1]，[5]）．したがって単位分数展開の話は，単なる授業教材ではなく，読者・生徒にさらに深い数学の世界への興味を持たせる非常におもしろい対象といえる．

2.3　付記

どのような正の分数も，互いに異なる単位分数の和で表示できることを証明する．ま

ず，1より小さい正の分数 $\frac{a}{b}$（$1 \leq a < b$）が，欲張り展開法を使うことにより互いに異なる単位分数の和で表示できることを証明する．

$$\frac{1}{n} < \frac{a}{b} < \frac{1}{n-1}$$

なる自然数 n をとる．この式より $0 < an - b < a$ が得られ，

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{an-b}{bn} < \frac{a}{bn}$$

となる．したがって $\frac{a}{b}$ から，$\frac{a}{b}$ を超えない単位分数のうち最大のもの $\frac{1}{n}$ を引いた残りの分数について，**その分子は元の a より小さい**．分子は常に自然数だから，この操作を繰り返すことで最後は分子が1のものが現れる．

一般の正の分数について証明する．与えられた分数を整数部分と1より小さい部分に分ける．例2.4より，整数部分は互いに異なる単位分数の和で表示できる．1より小さい部分についても，今示したことにより互いに異なる単位分数の和で表示できる．これらに現れる単位分数がすべて異なる場合には，これらを足せば証明は完了する．整数部分から出てくる単位分数と，1より小さい部分から出てくる単位分数の中に同じものがあった場合，単純に加えると互いに異なるという条件に反してしまう．この場合はそのような単位分数のうちの一つを，例2.4の方法で，すでに現れている単位分数とも異なる単位分数で展開する．この操作を繰り返すことにより，現れる単位分数すべてが互いに異なるようにすることができる．以上で証明が完了する．

3　図形の話—古代ギリシアの問題から—（対象学年：中学高学年）

正五角形には，相似，作図，無理数，黄金比，フィボナッチ数などの数学的に興味深い教育的題材が含まれている．授業の進め方によっては無理数を持ち出さなくても，これらの性質を見つけることができ，小学生にも十分楽しめる題材である．ここでは古代ギリシアの話から，**正五角形の作図**に挑む．

3.1　無理数の発見

古代ギリシアの数学者ピタゴラス（紀元前582-496年）は，「万物の根源は数である」と説いた．これは，すべてのものや現象は自然数と数式によって表されるという，科学的思想を表したものである．ピタゴラスはその哲学の下で，哲学的教団ピタゴラス学派を立ち上げ，そこに集まった人々は様々な真理を追究していった．その中で発見された数学的結果として，

・三平方の定理

・ピタゴラス音律（弦の長さが整数比である2つの音は協和音となる）

・正五角形の作図，正十二面体（12個の正五角形を合わせてできる立体）の発見

などがある．教団により発見された結果は，外部には秘密とされていた．

また有名な事として，自然数とその比を重んじる彼らは，線分は分割できない最小点の集まり（数珠のようなもの）である—つまり，どのような2線分の長さの比も整数で表さ

れる—と考えていた．そのため，無理数の存在は否定していたという話がある．

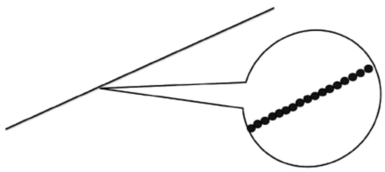

図２：線分は分割できない最小点の集まり

これに関連して，ピタゴラスの弟子ヒッパソスは正五角形や正十二面体の研究の中で，教団のシンボルマークである五芒星の中に無理数が存在することを発見し，さらにこの秘密を外部に漏らしてしまったためピタゴラスの手によって海に落とされてしまった，という逸話は有名であろう*．五芒星とは正五角形の対角線を結んでできる，図３のような☆マーク $ABCDE$ のことである．正五角形の作図という輝かしい功績や，正五角形の１辺と対角線の比が黄金比と呼ばれる美しい比になっている事実から，五芒星は教団のシンボルとしてふさわしかったのかと推察される．

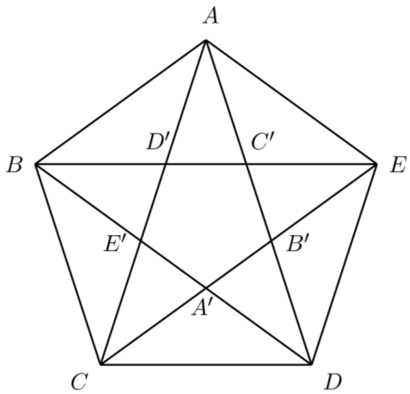

図３：正五角形と五芒星

この逸話について深く述べる前に，正五角形に現れる相似な図形を調べてみよう．まず図３のように正五角形の対角線を引いていくと，中に再び正五角形 $A'B'C'D'E'$ ができることがすぐにわかる．他にも様々な相似図形がこの中に隠されていることがわかる（至る所に36° が現れるのでそれを頼りにするとよい）．例えば対角線で分割した形のパネルを，相似を学んだ生徒に配布し探させてみるとよい．少々見つけづらいが生徒の中には，辺 AD' が内部の正五角形の対角線 $A'C'$ と平行かつ長さが等しいということに気づくものもいるだろう．このように正五角形は自己相似をもち，後で見るようにその相似比に黄金比が現れる美しい図形である．

さて，逸話によるとヒッパソスは次のように考えた．今，ピタゴラスの言う通り，線分

*最近の研究では，五芒星の中に無理数の存在を発見したというのは根拠に乏しい説であり，三平方の定理から無理数が発見されたという説が有力であるが，話の流れとして採用する．

AB，AC の長さが各々分割できない最小点 m 個と n 個でできていると仮定する．内部の正五角形の長さを調べてみると

$$
\begin{aligned}
A'C' &= CE' \\
&= AC - AE' \\
&= AC - AB \\
&= n - m\ (< n) \\
A'B' &= D'E' \\
&= CD' - CE' \\
&= m - (n - m)\ (< m)
\end{aligned}
$$

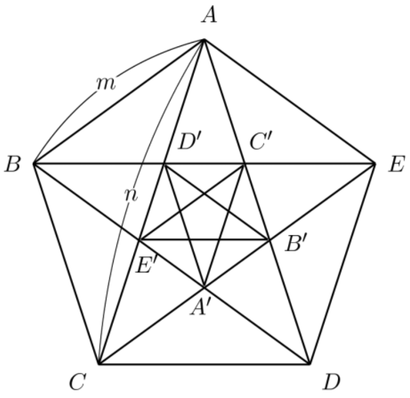

図４：正五角形内の自己相似

である．つまり線分 $A'B'$，$A'C'$ は m，n より少ない個数の最小点でできている．ところが $A'B'C'D'E'$ の内部にも正五角形は無数にあり，それらに対してこのような長さの計算を続けていけば，いつかは最小単位より小さい辺をもつ正五角形が出てきてしまうことになる．これはすべての線分が最小点の集まりであることに反しており，線分 AB，AC の長さが整数比で表せないことを示している．

たとえ $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明するのであっても，素因数分解に関する知識が必要だが，この方法は無理数そのものを発見せずとも，その存在を相似を使って証明しているところがおもしろい．

3.2　現れる無理数

ヒッパソスが見つけた，正五角形の中に現れる無理数を求めてみる．図５のような１辺が１の正五角形 $ABCDE$ を考える．このとき，$AB = 1$ より対角線 $AC = x$ が $AB : AC$ の比になる．

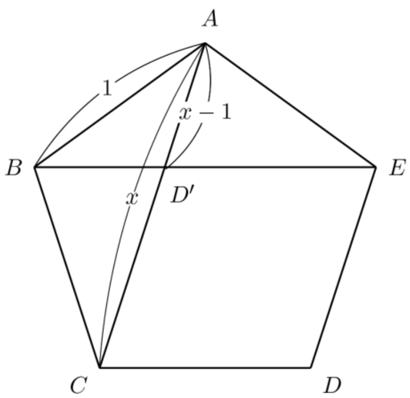

図５：黄金比を求める

$\triangle ABD'$と$\triangle ACB$について，$\angle BAD'=\angle CAB$（共通）であり，$\triangle ABE\equiv\triangle BCA$より$\angle ABD'=\angle ACB$．したがって２角が等しいことから$\triangle ABD'$と$\triangle ACB$は相似である．対応する辺の比は等しいから，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BD}':\mathrm{CB}，\text{すなわち}\quad 1:x=(x-1):1$$

となる．これを解くと，$x^2-x-1=0$の１より大きい解

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

が求める対角線ACの長さである．$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$は黄金比とよばれ，フィボナッチ数とも関連したり図形の自己相似を与えるなどきれいな性質をもっている．

3.3　正五角形の作図

古代ギリシア人たちは，実用性や経験則より美しさや論理の厳密さを求めた．その性格のため，無理数が現れる数の世界や複雑な変化量の考察を避け，図形や静止した運動を扱った．ユークリッドの『原論』では，円，直線などの自明な事実から始まって，論証によってさまざまな幾何学的定理を証明していく．作図という定規（直線）とコンパス（円）のみに制限した幾何学を研究したのは，この一環によるものといわれている．

この節では，前節で求めた黄金比の値をヒントに，ピタゴラス教団も見つけたという正五角形の作図方法を考えてみる：

問題　長さ１の線分があるとき，それを１辺とする正五角形を作図せよ．

この問題は数学に興味のある中高生なら取り組んだこともあるだろうが，多くの人はその経験はないだろうと思われる．ただ闇雲に挑戦してもうまくいかない．以下のようにちょっとしたヒントを付け加え，周りの人と協力して挑戦させると，多くの生徒が作図でき，発見の喜びを得ることができる．

まず作図とは，定規とコンパスを使って，次の２つのルールのもと有限回の操作で図形を描く操作であった：

作図のルール

・定規は２点を通る直線を引くことのみに使用できる（目盛りで長さを測ることは禁止）
・コンパスは２点の長さのコピー，およびそれを使って円・弧を描く事に使用できる．

中学の授業では，垂直２等分線や角の２等分線の作図法および垂線の作図法を学び，それを基本として１辺が１の正三角形，正四角形，正六角形の作図を行う．これらの復習をさせた後で，いよいよ１辺が１の正五角形の作図を考えさせる．

ヒントは，前節でわかった「対角線が$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$」ということである．この長さをもつ線分が作図できれば，長さ１の線分を底辺として等辺$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$をもつ二等辺三角形ACDが作図できる．あとは図６を参照すれば，正五角形が作図できる．

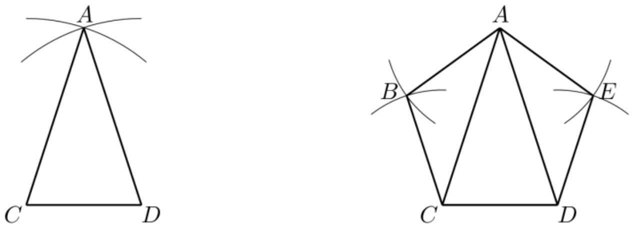

図６：正五角形の作図（後半部分）

以上より長さ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ をもつ線分を作図すればよい．このことを教えたあと挑戦させる．以下この方法の１つを記す．長さ $\sqrt{5}$ の線分の作図は，直角を挟む辺の長さが１，２の直角三角形を作れば，その斜辺が $\sqrt{5}$ となることより得られる（これは垂直２等分線の作図法を利用すればよい）．この線分から $1+\sqrt{5}$ の長さの線分を作り，中点をとれば，長さ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ をもつ線分が作図できる．

3.4　付記

正三角形，正四角形，正六角形に加え，正五角形が作図可能であることを述べたが，正七角形はどのように作図するのであろうか？もっと一般にどのような正多角形でも作図可能であろうか？このことについて記しておく．

1796年３月30日の朝，目を覚ました19歳のガウスは，正十七角形が作図可能であることに気づいたと彼の日記にある［6］．この2000年来の大発見が彼に数学者としての道を決意させたと考える人もいる．ガウスの研究はさらに進んで，作図可能な正 n 角形は，n が

$$n = 2^m p \quad (m \geq 0)$$

という形であって，p はフェルマー素数であるときに限られることを発見した．ただしフェルマー素数とは

$$p = 2^{(2^{\ell})} + 1 \quad (l \geq 0)$$

という形の素数であって，現在まで p＝3，５，17，257，65537の５つしか知られていない．特に，正五角形，正十七角形は作図可能（正257角形，正65537角形も！）であるが，正七角形は定規とコンパスでは作図できない．

黄金比とフィボナッチ数列の関係は様々な本に述べられているのでここではとりあげない．正五角形が作図可能であることが，2500年以上前に知られていたこと，そしてその後の進展に2000年以上要したことは驚くべきことである．

4　計算を楽しむ―古代ギリシアの問題から―（対象学年：中学低学年）

ここでは後期ギリシアの文献からユークリッドの互除法を紹介する．2012年度からの新課程「数学Ａ」において，ユークリッドの互除法が取り上げられているが，割り算，素因

数分解，最大公約数を学んでいれば問題なく理解できる内容である．互除法は割り算や整数の熟知に役立つ．原理はわからなくとも，その方法で求めた値が確かに欲しい答えであったことを確認すると，とても驚き数学に対する不思議さを実感できる．このような感動，驚きは数学の原動力ともいえるもので，それを体験させることは算数・数学教育に不可欠である．

4.1　最大公約数

ユークリッドの互除法とは，２つの整数の最大公約数を求める操作である．まず最大公約数について復習しておく．

自然数 a を自然数 c が割り切るとき，c は a の**約数**という†．１と自分自身 a は常に a の約数である．これらしか持たない１より大きい自然数を**素数**とよび，これについては非常に不思議な性質や謎があることが知られている．たとえば，どのような自然数も，$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ のように素数の積に分解できること（**素因数分解**）はよく知られている．
２つの自然数 a，b に対し，共通の約数を a，b の**公約数**といい，それらのうちで最大のものを，**最大公約数**とよんでいる．最大公約数を求めることは，整数の性質を調べるために必要なだけでなく，現代の暗号理論においても基本操作の１つとなっている．

例 4.1.　24と56の公約数を求める．24の約数は１，２，３，４，６，８，12，24であり，一方56の約数は１，２，４，７，８，14，28，56とわかる．これらの中で共通のものが公約数で，それは１，２，４，８．このうち最大のもの８が最大公約数である．このことは，素因数分解

$$24 = 2^3 \times 3,\ 56 = 2^3 \times 7$$

を行うことからも分かる．

例 4.2.　７と13の公約数を求める．７の約数は１，７であり，一方13の約数は１，13となっている．よって公約数は１のみで，これが同時に最大公約数になる．

約数を求める方法の一つは素因数分解を行うことである．しかし大きな数になってくると，素因数分解を行うのは難しくなっていく：

例 4.3.　2201と4189の最大公約数を素因数分解により求めてみる．2201の素因数分解を行うと $2201 = 31 \times 71$ であり，一方4189の素因数分解を行うと $4189 = 59 \times 71$ と大きな素因数からなる．これらを一生懸命求めて，ようやく最大公約数が71とわかることになる．

次に，この最大公約数を簡単に求める方法を述べる．

4.2　ユークリッドの互除法

ユークリッド（紀元前３世紀ごろ）は，中学で習う平面幾何の諸定理や整数の性質などを記した，数学史上最も重要な著作『原論』の著者である．『原論』第７巻には最大公約数を求める方法が記されており，今日「**ユークリッドの互除法**」とよばれている．これは最古かつ最高のアルゴリズムとも言われている．

---

†整数 a，c（０でもよい）に対しても，$a = bc$（b は整数）と書けるとき c は a の約数というが，ここでは自然数のみ扱うことにする．

ユークリッドの互除法

自然数 a，b に対し

$$\begin{aligned} &a \text{ を } b \text{ で割った余りを } r_1\\ &b \text{ を } r_1 \text{ で割った余りを } r_2\\ &r_1 \text{ を } r_2 \text{ で割った余りを } r_3\\ &\qquad\vdots \end{aligned}$$

と続けて，○が□で割り切れたとすると，□が a，b の最大公約数となる．

例 4.4. 221と26の最大公約数を互除法により求める．

$$\begin{aligned} &221 \div 26 \text{は商 } 8\text{，余り}13\text{（すなわち}221 = 26 \times 8 + 13\text{）}\\ &26 \div 13 \text{は商 } 2\text{，余り } 0 \end{aligned}$$

これより221と26の最大公約数は13とわかる．実際，２つの数を13で割ると $221 = 13 \times 17$，$26 = 13 \times 2$ であり，17, 2 の公約数は１のみであるから，確かに221と26の最大公約数は13である．

例 4.5. 60と168の最大公約数を互除法により求める．

$$\begin{aligned} &168 \div 60 \text{は商 } 2\text{，余り}48\\ &60 \div 48 \text{は商 } 1\text{，余り}12\\ &48 \div 12 \text{は商 } 4\text{，余り } 0 \end{aligned}$$

これより60と168の最大公約数は12とわかる．実際，２つの数を12で割ると $60 = 12 \times 5$，$168 = 12 \times 14$ であり，５，14の公約数は１のみだから，これより確かに最大公約数は12である．

例 4.6. 2201と4189の最大公約数は既に例**4.3**で71と求めたが，これを互除法により求める．

$$\begin{aligned} &4189 \div 2201 \text{は商 } 1\text{，余り}1988\\ &2201 \div 1988 \text{は商 } 1\text{，余り}213\\ &1988 \div 213 \text{は商 } 9\text{，余り}71\\ &213 \div 71 \text{は商 } 3\text{，余り } 0 \end{aligned}$$

よって2201と4189の最大公約数は71と確認できる．素因数分解のような試行錯誤をせずとも，**最大公約数が少ない計算回数で確実に求まる**のが互除法の利点である．

なぜこれで求まるかという証明よりも先に，実際に計算してみると，その後の互除法の仕組みの説明を理解させやすい．例えば，以上の例を挙げたのち，次のような大きな数の最大公約数が容易に求まることを確認させる．ここで必ず，求めた数が本当に最大公約数かどうかをチェックさせる：

問題 4.7. 255と315の最大公約数を互除法により求めてください．求めた数が本当に最大公約数かどうかもチェックしてみてください．

問題 4.8. 12707，12319の最大公約数を互除法により求めてください．求めた数が本当に最大公約数かどうかもチェックしてみてください．

4.3　互除法で求まる理由

互除法で最大公約数が求められる理由は，図形を使うことで次のように簡単に説明できる（この節は［2］を参照した）．

図７を参考に，縦60，横168の床に正方形のタイルを敷き詰めることを考える．縦横１の正方タイルを使えばもちろん敷き詰められるが，できる限り大きいタイルで敷き詰めたいとしよう．

(1) まず短い方の辺60を一辺とする正方形でできるだけ多く敷き詰めておく．
すると168 ÷ 60の余りが48より，縦60，横48の長方形部分が残る．

(2) 次にこの長方形に対して，短い方の辺48を一辺とする正方形でできるだけ多く敷き詰めていく．60 ÷ 48の余りが12より，縦12，横48の長方形部分が残る．

(3) 今度はこの長方形に対して，同様の敷き詰めを行っていくと，縦横12の正方形で敷き詰めることができる．

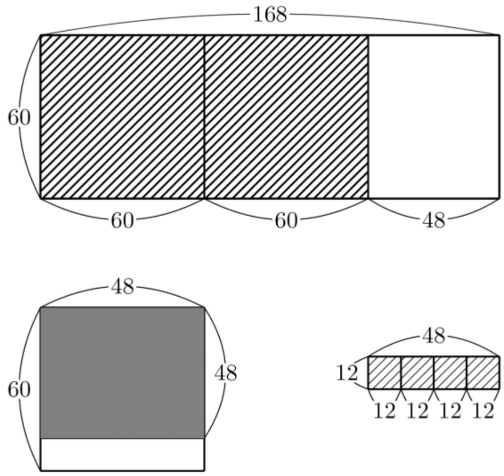

図７：互除法の説明

(3)の長方形の横の長さが(2)で敷いた正方形の１辺の長さ，(2)の長方形の縦の長さが(1)で敷いた正方形の１辺の長さであることを考えると，縦横12の正方形で全体を敷き詰めることができることがわかる．

ユークリッドの互除法を教材として説明する際には上の説明で十分である．次に数式を使ってより精密に説明する．これは次の節で説明する「拡張ユークリッドの互除法」を取り上げる際に必要である．以下のことは一般の証明のために文字を使うが，生徒には少々とっつきにくいので具体的な数で確かめた方が理解しやすいと思われる．

自然数 a，b に対し，a を b で割った時の商を q，余りを r_1 とおくと

$$a = bq + r_1$$

となる．一方 a，b の公約数 c をとると，$a = ca'$，$b = cb'$（a'，b' は自然数）と書ける．これを上の式に代入して r_1 について解くと

$$r_1 = c\,(a' - b'q).$$

$a' - b'q$ は整数だから，この式から c は r_1 の約数でもあることがわかる．よって c は a，r_1 の公約数でもある．

逆に b，r_1 の公約数を d として $b = dB$，$r_1 = dR_1$(B，R_1 は自然数）と表示すると，上の式に代入して変形することにより

$$a = d\,(qB + R_1)$$

となる．$qB + R_1$ は整数だから，これは d が a の約数でもあることを示している．よって d は a，b の公約数でもある．

以上より，a，b の公約数全体と b，r_1 の公約数全体は一致する：

$$\{a,\ b \text{ の公約数}\} = \{b,\ r_1 \text{ の公約数}\}.$$

特に，**a と b の最大公約数は b と r_1 の最大公約数と一致**する．これを続けていけば，最後に出た余り□が最初の a，b の最大公約数になる．

4.4　発展―拡張ユークリッドの互除法―

ユークリッドの互除法のもう一つの利点は

最大公約数 d を，a と b を使って $d = ax + by$（x，y はある整数）と表示できる

ということである．このことは，一次方程式 $ax + by = d$ の整数解を求めたりするのに便利なだけでなく[‡]，整数の性質を調べる際に重要な役割を果たす．上記のように表示できることを説明するために，ユークリッドの互除法を行っている際の途中式を使って，最大公約数について解いてみる．

例 4.9.　例えば，例4.4の$221 = 26 \times 8 + 13$を最大公約数13について解くと

$$\begin{aligned} 13 &= 221 - 26 \times 8 \\ &= 221 \times 1 + 26 \times (-8). \end{aligned}$$

これより方程式$221x + 26y = 13$の１つの整数解 $x = 1$，$y = -8$ が得られる．

例 4.10.　例4.5の最後の操作以外の操作を書き直して，

$$\begin{aligned} 168 &= 60 \times 2 + 48 \\ 60 &= 48 \times 1 + 12 \end{aligned}$$

と書く．これを最大公約数12について解くと

$$\begin{aligned} 12 &= 60 - 48 \times 1 && \text{（第二式より）} \\ &= 60 - (168 - 60 \times 2) \times 1 && \text{（第一式より）} \\ &= 168 \times (-1) + 60 \times 3. \end{aligned}$$

[‡]一次方程式 $ax + by = d$ を考えるとき，その実数解を求めるのは容易であるが，x，y が整数となるものを求めようとすると，途端に難しくなる．

これより方程式$168x+60y=12$の１つの整数解$x=-1$，$y=3$が得られる．

より一般に，aとbの最大公約数がユークリッドの互除法

$$
\begin{aligned}
&a = bq_0 + r_1 \ (0 \leq r_1 < b) \\
&b = r_1 q_1 + r_2 \ (0 \leq r_2 < r_1) \\
&r_1 = r_2 q_2 + r_3 \ (0 \leq r_3 < r_2) \\
&\qquad \vdots \\
&r_n = \bigcirc\, q_n + \square \ (0 \leq \square < \bigcirc) \\
&\bigcirc = \square\, q
\end{aligned}
$$

により$d=\square$と求まったとする．これを下から二番目の式から順に上に向かってdについて解いていくと，$d=ax+by$と表示できる．以上をまとめると次のようになる．

拡張ユークリッドの互除法

自然数a，bに対しdをその最大公約数とすると，

$$ax + by = d$$

を満たす整数解x，yが存在する．そしてその一つはa，bに対して行ったユークリッドの互除法をdについて解いていくことで，実際に見つけられる．

次を問題として出しておく．

問題 4.11. $255x+315y=15$の整数解x，yを一つ求めてください．見つけたら実際に代入して確かめてみてください．

問題 4.12. $2201x+4189y=71$の整数解x，yを一つ求めてください．見つけたら実際に代入して確かめてみてください．

問題 4.13. 13リットル入るバケツと15リットル入るバケツがある．これらを使って１リットルの水を測り取るにはどのようにすればよいか．$13x+15y=1$の整数解を見つけることにより考えてみよ．

一つではなくすべての整数解も求めることができる．詳細は，例えば高校数学Ａの教科書参照．

一次方程式の整数解

自然数a，bに対しdをその最大公約数とし，$a=a'd$，$b=b'd$と表示する．このとき

$$ax + by = d$$

を満たす整数解の一つをx_0，y_0が存在する．さらに他のすべての解は

$$x = x_0 + b'k,\ y = y_0 - a'k,\ (k \text{は任意の整数})$$

で与えられる．

参考文献

[1] エジプト式分数（単位分数展開）— Wikipedia http://ja.wikipedia.org/wiki/

[2] おもしろ数学講座ーかんたんユークリッドの互除法，
http://www.cwo.zaq.ne.jp/bfaby 300/math/gojyo.html

[3] リンド数学パピルスと古代エジプトの数学，
http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/RhindPapyrus/index.htm

[4] A.B.Chace（著），吉成薫（翻訳），リンド数学パピルス—古代エジプトの数学，朝倉書店.

[5] Richard K. Guy（著），金光滋（翻訳），数論未解決問題の事典，朝倉書店.

[6] 高木貞治，近世数学史談，岩波書店.

Received date : Oct. 8, 2014
Accepted date : Nov. 12, 2014